EPFL

Enseignants: Anne-Marie Dovi
Géométrie Analytique - CMS
18 avril 2023
Durée : 105 minutes

1

BLANK-1

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 5 questions sur 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
☒ ☑ ■	☐	☐

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, une question est posée. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne le cercle $\gamma(\Omega, r)$ d'équation cartésienne :

$$\gamma : 5x^2 + 5y^2 + 30x - 20y - 10 = 0\,.$$

Question 1 (2 points)

Quel est son centre Ω et son rayon r?

- ☐ $\Omega(3,-2)$ et $r=\sqrt{7}$
- ☐ $\Omega(3,-2)$ et $r=\sqrt{15}$
- ■ $\Omega(-3,2)$ et $r=\sqrt{15}$
- ☐ $\Omega(-3,2)$ et $r=\sqrt{7}$

Enoncé

Dans l'espace muni d'un repère ortonormé, on donne une droite $d(A,\vec{u})$ et un vecteur $\vec{v}$ non colinéaire à $\vec{u}$.

Question 2 (2 point)

Donner un vecteur directeur d'une droite ℓ telle que ℓ soit incluse dans le plan $\pi(A,\vec{u},\vec{v})$ et soit orthogonale à d.

- ■ $(\vec{v}\times\vec{u})\times\vec{u}$
- ☐ $(\vec{v}\times\vec{u})\times\vec{v}$
- ☐ $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{v})$
- ☐ $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{v}$

Enoncé

Dans l'espace muni d'un repère ortonormé, on donne les trois vecteurs $\vec{a}\,,\vec{b}$ et $\vec{c}$ suivants :

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Question 3 (1 point)

Quel est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a}\,,\vec{b}$ et $\vec{c}$?

- ☐ $\frac{2}{3}$
- ■ 4
- ☐ 5
- ☐ $\frac{5}{6}$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 4: *Cette question est notée sur 6 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5 6

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne deux points Ω et F ainsi qu'un nombre réel e en fonction d'un paramètre réel k :

$$\Omega\,(1\,,\,0)\,,\qquad F\,(k\,,\,0)\qquad \text{et}\qquad e=\frac{k-1}{k}\,.$$

(a) Déterminer le domaine de variation de k de sorte que $\mathcal{E}$ soit une ellipse de centre Ω, de foyer F et d'excentricité e.

Puis donner l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ en fonction du paramètre k.

(b) Soient F' l'autre foyer de $\mathcal{E}$ tel que F' soit d'abscisse positive, et B l'extrémité du petit axe d'ordonnée positive.

Déterminer l'équation cartésienne de l'ellipse $\mathcal{E}$ de sorte que la droite BF' soit de pente $m=2\sqrt{2}$.

Solution

(a) $\mathcal{E}$ est une ellipse donc $0<e<1$

$\frac{k-1}{k}>0 \Longrightarrow k\in\,]-\infty;0\,[\,\cap\,]\,1;+\infty\,[$

$\frac{k-1}{k}<1 \Longrightarrow \frac{k-1}{k}-1=-\frac{1}{k}<0 \Longrightarrow k\in\,]\,0;+\infty\,[$

D'où : $k\in\,]\,1;+\infty\,[$

$\mathcal{E}$ telle que $\Omega(1;0), F(k;0),\quad k>1$,: le grand axe est donc Ox.

$e=\frac{c}{a}=\frac{k-1}{k}$ et $c=\text{dist}(\Omega,F)=k-1>0$

D'où $a=\frac{c}{e}=k,\quad k>1$

$b^2=a^2-c^2=k^2-(k-1)^2=2k-1>0$ car $k>1$

(et on a bien que $a^2>b^2$ car $k^2>2k-1$).

D'où

$\mathcal{E}:\ \frac{(x-1)^2}{k^2}+\frac{y^2}{2k-1}-1=0,\quad k>1$

(b) $F'(x_\Omega-c;0)=(1-(k-1);0)=(2-k;0)$ et $k>1$ et $x_{F'}>0$ donc $1<k<2$

$B(x_\Omega;y_\Omega+b)=(1;\sqrt{2k-1})$

$\overrightarrow{BF'}=\begin{pmatrix}1-k\\-\sqrt{2k-1}\end{pmatrix}$, d'où $m_{BF'}=\frac{\sqrt{2k-1}}{k-1},\quad 1<k<2$

Condition : $\sqrt{2k-1}=2\sqrt{2}(k-1)>0$ on peut élever au carré

$2k-1=8k^2-16k+8$

$8k^2-18k+9=0$

$8(k-\frac{3}{2})(k-\frac{3}{4})=0$

Seule solution : $k = \frac{3}{2}$

D'où :

$\mathcal{E} : 4\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

Question 5: *Cette question est notée sur 9 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

On munit le plan d'un repère orthonormé. Soit la famille $\mathcal{F}$ de coniques dépendant d'un paramètre réel m donnée par :

$$\mathcal{F}: \quad 3m^2\, x^2 + (4m^2 - 1)\, y^2 - 3m^2(4m^2 - 1) = 0$$

(a) Déterminer selon les valeurs du paramètre m le genre des coniques de la famille $\mathcal{F}$ (genre = cercle, hyperbole, ellipse ou droite).

(b) Dans le cas où les coniques de la famille $\mathcal{F}$ sont des ellipses ou des hyperboles, préciser pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m la direction de leur grand axe ou de leur axe réel est horizontale ou verticale.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre m a-t-on une hyperbole équilatère?

Solution

(a) $m = 0: \quad -y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$: droite (axe Ox).

$m = \pm\frac{1}{2}: \quad \frac{3}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$: droite (axe Oy).

Pour $m \neq 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ l'équation donnée est équivalente à :

$$\frac{x^2}{4m^2 - 1} + \frac{y^2}{3m^2} - 1 = 0$$

$m = \pm 1: \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3 = 0$: cercle.

$-\frac{1}{2} < m < 0$ ou $0 < m < \frac{1}{2}$: $\quad 4m^2 - 1 < 0$ et $3m^2 > 0$: hyperbole.

$m \in]-\infty, -1[\cup]-1, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup]1; +\infty[$: $\quad 4m^2 - 1 > 0$ et $3m^2 > 0$: ellipse.

(b) Dans le cas où $m \in]-\infty, -1[\cup]-1, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup]1; +\infty[$ (cas ellipse)

On a $4m^2 - 1 > 3m^2 \Leftrightarrow m^2 > 1 \Leftrightarrow ((m < -1)$ ou $(m > 1))$.

Ce qui donne le résultat suivant:

Pour $m < -1$ ou $m > 1$: grand-axe horizontal.

Pour $-1 < m < -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < m < 1$: grand axe vertical.

Dans le cas où $-\frac{1}{2} < m < 0$ ou $0 < m < \frac{1}{2}$: $\quad 4m^2 - 1 < 0$ et $3m^2 > 0$: hyperbole d'axe réel vertical.

(c) L'hyperbole est équilatère $\Longleftrightarrow 3m^2 = 1 - 4m^2 \Longleftrightarrow 7m^2 = 1 \Longleftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}$